

# Unterrichtsverlaufsplan über eine 90-Minuten-Stunde

**Klasse:** 11. Klasse, Gymnasium, Mathematik

**Thema der Unterrichtseinheiten:** Explizite und implizite Berechnungsvorschriften für Quadrat- und Dreieckszahlen

Teach@TUM wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsinitiative Lehrerbildung“ von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.



GEFÖRDERT VOM

Bundesministerium  
für Bildung  
und Forschung

**Zeitangabe:** Eine Doppelstunde (90 min)

**Lernziel(e):** Erarbeitung der Summendarstellung von Quadratzahlen und umgekehrt Entwicklung der Summendarstellung von Dreieckszahlen als Formel.

**Kompetenzen:**

**Fachkompetenz:** Die SuS lernen wie mithilfe geometrischer Anschauung verschiedene algebraische Formel miteinander in Beziehung gesetzt werden können. Außerdem lernen sie eine Beweisnotwendigkeit kennen und die entsprechenden Behauptungen streng zu beweisen. Sie knüpfen das neue Wissen an Vorwissen an, sie üben den Darstellungswechsel.

**Sozialkompetenz:** Die SuS lernen, gemeinsam offene Arbeitsaufträge zu bearbeiten; sie erkennen, dass mehrere Lösungen richtig sein können.

**Medienkompetenz:** SuS erlernen den Umgang mit dynamischen mathematischen Visualisierungen sowie mit Smartphones und QR-Codes.

**Personelle Kompetenz:** SuS erarbeiten eigenverantwortlich Lösungen und tragen diese vor der Klasse vor.

**Materialien:** Bauklötze, Tablet, Tafel, Beamer und Heft

**Abkürzungen:** AB = Arbeitsblatt

UE = Unterrichtseinheit

L = Lehrerinnen oder Lehrer

SuS = Schülerinnen und Schüler

QZ = Quadratzahlen

DZ = Dreieckszahlen

## Die Unterrichtseinheit (90 min)

| Zeit                 | Unterrichtssituation und Inhalt  | Lehreraktivitäten (einzelne Impulse wörtlich)  | Schüleraktivitäten  | Kompetenzen   | Aktions- und Sozialform               | Medien/ Materialien |
|----------------------|--|--|---|---|---------------------------------------|---------------------|
| Ca. 5 min (Szene 1)  | Begrüßung und Einstieg in die UE: Wiederholung der Quadratzahlen.  | Begrüßung durch L.<br><br>L. bittet die SuS, die ersten zehn QZ zu wiederholen und schreibt diese an die Tafel.  | SuS übertragen die Liste der ersten zehn QZ in ihr Heft.  | Fachkompetenz:<br>Verknüpfung mit Vorwissen; Finden von Zusammenhängen und arbeiten mit Darstellungswechseln. | L.-S.<br>Gespräch                     | Tafel               |
| Ca. 10 min (Szene 1) | Partnerarbeit zur Findung der Summendarstellung.   | „Versucht mal herauszukriegen, ob ihr in den Quadratzahlen noch ein Bildungsgesetz seht, dass überhaupt nichts mit Multiplikation zu tun hat.“<br><br>L. gibt Hilfestellungen.<br><br>L. bringt die SuS darauf, die Abstände der QZ zu beschreiben.  | SuS diskutieren in Paaren mögliche Bildungsgesetze der QZ.  | Soziale Kompetenz:<br>Gegenseitige Unterstützung.   | Partnerarbeit                         | Heft                |
| Ca. 5 min (Szene 2)  | Besprechung der Partnerarbeit.<br><br>Erteilung des Arbeitsauftrags.<br><br>Zusammentragen der Ergebnisse. | L. diskutiert mit den SuS die gefundenen Regeln.<br><br>L. erläutert an einem Beispiel, wie man eine QZ als Summe von ungeraden Zahlen schreiben kann.<br><br>L. lässt SuS die anderen QZ dementsprechend im Heft ergänzen.<br><br>L. sammelt die Summenformeln an der Tafel (nicht im Video). | SuS stellen ihre Lösungen vor.<br><br>SuS ergänzen die Tabelle der QZ in ihrem Heft (nicht im Video). | Personelle Kompetenz:<br>Vorstellen der gefundenen Lösungen.  | L.-S.<br>Gespräch<br><br>Einzelarbeit | Tafel<br><br>Heft   |

## Die Unterrichtseinheit (90 min)

| Zeit                    | Unterrichtssituation und Inhalt  | Lehreraktivitäten (einzelne Impulse wörtlich)   | Schüleraktivitäten  | Kompetenzen   | Aktions- und Sozialform        | Medien/ Materialien              |
|-------------------------|--|---|---|---|--------------------------------|----------------------------------|
| Ca. 20 min<br>(Szene 3) | <p>Wecken der Beweisbedürftigkeit.</p> <p>Visualisierung der Beweisidee der gefundenen Summenformel.</p> <p>Arbeitsphase</p> | <p>L. erklärt, dass die bisherigen Beobachtungen noch nicht als vollständiger Beweis ausreichen.</p> <p>L. teilt Bauklötze aus.</p> <p>„Die Aufgabe ist, einen Beweis in Form einer Visualisierung für unsere eben aufgestellte Vermutung zu finden.“</p> <p>L. geht durch die Klasse und gibt Hilfestellung.</p> | <p>SuS formen aus Bauklötzen Quadrate, um die eben gefundene Summenformel sichtbar zu machen.</p>   | <p>Fachkompetenz: Finden von Zusammenhängen und Arbeiten mit Darstellungswechseln; Verstehen von Beweisnotwendigkeit.</p> <p>Soziale Kompetenz: Gegenseitige Unterstützung.</p>   | L.-S.- Gespräch, Partnerarbeit | Bauklötze                        |
| Ca. 10 min<br>(Szene 4) | <p>Einführung einer anderen Summenformel für DZ.</p> <p>Erarbeitung einer geometrischen Darstellung für DZ.</p>              | <p>L. zeigt auf, dass es naheliegender ist, alle Zahlen zu addieren.</p> <p>L. berechnet zusammen mit den SuS einige neue Zahlen.</p> <p>L. gibt den Auftrag, diese Zahlen wieder mit Bauklötzen systematisch darzustellen.</p>   | <p>Die SuS berechnen die ersten paar Summen von natürlichen Zahlen.</p> <p>SuS stellen in sinnvoller Weise diese Zahlen mit Bauklötzen dar.</p> | <p>Fachkompetenz: Finden von Zusammenhängen, Arbeiten mit Darstellungswechseln.</p> <p>Soziale Kompetenz: Gegenseitige Unterstützung, Akzeptanz verschiedenartiger Lösungen.</p> <p>Medienkompetenz: Umgang mit digitalen Medien.</p> | L.-S. Gespräch, Gruppenarbeit  | Tafel, Bauklötze, Tablet, Beamer |

## Die Unterrichtseinheit (90 min)

| Zeit                 | Unterrichtssituation und Inhalt  | Lehreraktivitäten (einzelne Impulse wörtlich)  | Schüleraktivitäten   | Kompetenzen   | Aktions- und Sozialform       | Medien/ Materialien       |
|----------------------|--|--|--|---|-------------------------------|---------------------------|
|                      |  | <p>L. lässt die SuS ihre Lösungen an das Lehrer-Tablet schicken</p> <p>L. diskutiert mit den SuS einen passenden Namen für diese erhaltenen Zahlen: DZ.</p>  | SuS stellen ihre Lösung vor.   | Personelle Kompetenz: Vorstellen der gefundenen Lösungen.   |                               |                           |
| Ca. 10 min (Szene 5) | <p>Erarbeitung einer Multiplikations-Formel mittels Bauklötze.</p> <p>Präsentation der Ergebnisse.</p> | <p>L. gibt den Auftrag eine geschlossene Form für Dreieckszahlen zu finden, die sich um das Produkt <math>n \cdot (n + 1)</math> dreht.</p> <p>L. lässt die SuS erneut die gefundenen Lösungen vor der Klasse vorstellen und erklären.</p> | <p>Die SuS versuchen aus Bauklötzen Rechtecke mit Fläche <math>n \cdot (n + 1)</math> zu bilden, die die DZ erkennen lassen.</p> <p>SuS stellen die gefundene Lösung vor der Klasse vor.</p> | <p>Soziale Kompetenz: Gegenseitige Unterstützung, Akzeptanz verschiedenartiger Lösungen.</p> <p>Personelle Kompetenz: Vorstellen der gefundenen Lösungen.</p> | L.-S. Gespräch, Gruppenarbeit | Bauklötze, Tablet, Beamer |
| Ca. 10 min (Szene 5) | Beweis mittels vollständiger Induktion.  | <p>L. führt die SuS durch den Beweis mittels vollständiger Induktion.</p> <p>L. leitet die Formel <math>2 \cdot D_n = n \cdot (n + 1)</math> aus der Beweisidee her.</p>   | SuS stellen Teile des Beweises am Beamer vor.  | <p>Medienkompetenz: Umgang mit digitalen Medien.</p> <p>Personelle Kompetenz: Vorstellen von Beweisideen.</p>   | L.-S. Gespräch, Gruppenarbeit | Bauklötze, Tablet, Beamer |

## Die Unterrichtseinheit (90 min)

| Zeit                    | Unterrichtssituation und Inhalt   | Lehreraktivitäten (einzelne Impulse wörtlich)  | Schüleraktivitäten  | Kompetenzen  | Aktions- und Sozialform                  | Medien/ Materialien          |
|-------------------------|---|--|---|--|--|------------------------------|
| Ca. 15 min<br>(Szene 6) | <p>Herleitung des Geometrischen Zusammenhangs von QZ und DZ.</p> <p>Formaler Zusammenhang DZ und QZ.</p> <p>Formaler Beweis</p> | <p>Anhand der eben gefunden Visualisierung von <math>2 \cdot D_n = n \cdot (n + 1)</math> führt L. die SuS zum Zusammenhang <math>Q_n = D_n + D_{n-1}</math>, in-dem eine Reihe Bauklötze weggenommen wird.</p> <p>L. gibt den Impuls, zwei Formeln zu kombinieren.</p> <p>L. fasst das Ergebnis zusammen.</p> | <p>Die SuS erkennen die unterschiedlichen Dreieckszahlen in der angegebenen Darstellung mittels Bauklötzen.</p> <p>Die SuS formen den Term <math>D_n + D_{n-1}</math> eigenständig zu <math>Q_n</math> um.</p> <p>SuS setzen die Formel für DZ ein.</p> <p>SuS arbeiten selbstständig mit der Formel.</p> | Fachkompetenz:<br>Termumformungen; Arbeit mit Darstellungswechseln | L.-S.-<br>Gespräch,<br>Einzel-<br>arbeit | Bauklötze,<br>Tafel,<br>Heft |
| Ca. 5 min<br>(Szene 7)  | Abschluss der Stunde  | L. erzählt als Abschluss die Geschichte des jungen Gauß.   |   |  | L.-Vortrag                               |                              |